REVISTA INNOVACIÓN Y EXPERIENCIAS EDUCATIVAS DIGITAL

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 19 – JUNIO DE 2009

“MATEMÁTICAS Y SUS DIFERENTES PERSPECTIVAS”

AUTORÍA **SERGIO BALLESTER SAMPEDRO**
TEMÁTICA **MATEMÁTICAS**
ETAPA **ESO, BACHILLERATO**

Resumen

Comenzaré con una breve introducción de la situación en la que estaban las matemáticas a principios del siglo XIX, antes de la aparición de las paradojas. Luego veremos como los matemáticos intentan solucionarlas y como surgen las distintas Escuelas. Veremos cuáles son las diferencias entre las cuatro escuelas. En cada escuela se analizan sus fundamentos, cómo orientan las matemáticas y las críticas a las que son sometidas.

Por último se tratan las limitaciones de los sistemas formales que son tratadas en los teoremas de Gödel.

Palabras clave

Paradojas

Axiomas

Consistencia

Definición

Teorema

1. INTRODUCCIÓN:

Las Matemáticas hasta el siglo XIX fueron consideradas como un saber absoluto, pero empiezan a surgir ideas como la geometría no euclídea que niega el quinto postulado de Euclídes y que seguía siendo totalmente consistente la geometría no euclídea.

También con la aparición del álgebra de vectores de Gauss y el álgebra de matrices de Cayley en la aritmética aparecieron dudas sobre su verdad absoluta.

Así pues la verdad absoluta de las Matemáticas se derrumbó. Con esta situación se decidió revisar todo el conocimiento matemático dando un rigor a lo que no lo tuviese.

REVISTA DIGITAL INNOVACIÓN Y EXPERIENCIAS EDUCATIVAS

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 19 – JUNIO DE 2009

Durante todo el siglo XIX hubo una dedicación en dar un rigor a las Matemáticas, pero empezaron a surgir contradicciones en las matemáticas a las que se llamaron paradojas y que forman parte de las Matemáticas.

Entonces se empezó con la resolución de estas paradojas, pero ahora se revisaron los axiomas de partida, pero no todos los estudiosos aceptaron los mismos por lo que aparecieron cuatro escuelas: la logicista, la intuicionista, la formalista y la conjuntista.

En este artículo se verán entre otras cosas la forma de estudiar las matemáticas en las distintas escuelas.

2. DESARROLLO DE LA MATEMÁTICA Y CONTROVERSIA SOBRE LOS FUNDAMENTOS:

La relación de la Matemática con otras ciencias es compleja, así algunos consideran a la Matemática como un lenguaje universal que es aplicable a casi todas las ciencias, y del que se nutren éstas.

Las matemáticas, en la época griega, tuvieron un gran desarrollo. Una de las grandes aportaciones fue el método deductivo. Cabe destacar cómo por ejemplo el propio Euclídes formulaba enunciados que comprendían axiomas, definiciones y teoremas de tal forma que la verdad de los teoremas venía de una supuesta verdad de los axiomas.

Este método deductivo, se prolongó durante siglos y se basaba en que los axiomas y los teoremas estuvieran relacionados de forma deductiva, los axiomas eran verdaderos y que los teoremas debían de concordar con lo observado.

Entonces, desde el libro “Elementos” de Euclídes, las matemáticas han sido consideradas como una ciencia llena de rigor y con la verdad absoluta. Con el método deductivo se desarrolla la Matemática Hasta finales del siglo XIX, culminado con la teoría de conjuntos de Cantor.

Sin embargo, pronto se descubrieron en esta teoría una serie de paradojas, debido a que no tenía la necesaria propiedad de consistencia que todo conjunto de axiomas debe cumplir. Una de las paradojas que se descubrieron en la teoría de conjuntos de Cantor fue la de Russell.

Más tarde fueron apareciendo otras paradojas en otras partes de la Matemática.

Euclídes construyó la Geometría a partir de unos axiomas que se suponían verdaderos, así pues, a la Geometría se la consideraba como la rama de las matemáticas más completa, pero en el siglo XIX, Lobatchevsky postuló una geometría totalmente diferente de la de Euclídes, por ejemplo en esta geometría no se cumple el quinto postulado de la geometría de Euclídes.

En un principio, se pensó que el problema de dos geometrías, en las que lo verdadero en una era falso en otra era debido a que el quinto axioma no era un verdadero axioma. Todos estos problemas los resolvió Gödel, al estudiar las propiedades de los sistemas axiomáticos deductivos.

Se llegó a la creencia de que era necesaria una revisión de los fundamentos de las matemáticas para evitar las paradojas, es decir, se vio que era necesario formalizar las matemáticas con el fin de

INNOVACIÓN Y EXPERIENCIAS EDUCATIVAS
REVISTA DIGITAL

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 19 – JUNIO DE 2009

evitar que en sus axiomas aparecieran paradojas que hicieran fracasar las teorías. En esto, estaban todos los estudiosos de acuerdo, pero no lo estaban en cómo hacerlo, es por lo que aparecieron cuatro distintas escuelas cada una de ellas con una postura diferente.

2.1. Las Cuatro Escuelas:

2.1.1. La Escuela Logicista:

La postura adoptada por esta escuela es que considera a la lógica más importante que las matemáticas, y concluye que la matemática es una rama de la lógica.

Consideran que los conceptos de la matemática pueden derivarse de los conceptos lógicos a través de unas determinadas definiciones y que los teoremas matemáticos pueden derivarse de los axiomas lógicos.

Así pues, la postura de esta escuela es que todas las matemáticas se derivan de la lógica y como las leyes de la lógica eran aceptadas como verdades, entonces las matemáticas deberían ser verdades. Se deduce que como la verdad es consistente, entonces las matemáticas también lo son.

El primero en tratar este pensamiento del logicismo fue Leibniz, aunque con más profundidad fue estudiado por Peano y Russell como su mayor representante.

La explicación que dan a la aparición de las paradojas en las matemáticas, es negar que se deban a las relaciones existentes entre las entidades propias de las matemáticas, y culpan la aparición de las paradojas a nuestro modo de hablar de dichas relaciones.

Por tanto para evitar estas paradojas es básico la construcción de un lenguaje determinado con el que no se llegue a decir nada paradójico. Russell para resolver el problema de las paradojas propuso la teoría de los tipos, que fue aceptada por Gödel.

Críticas:

El mayor problema de la escuela logicista era la construcción de sistemas lógicos que dieran explicación a todas las matemáticas.

La lógica elemental ordinaria necesita la ayuda de unos axiomas que no pertenecen a la lógica elemental ordinaria para evitar contradicciones, por lo que no todas las teorías matemáticas se pueden reducir a la lógica elemental ordinaria.

El logicismo afirma que las matemáticas se pueden reducir a la lógica, por lo que se debería proporcionar un criterio para distinguir los principios lógicos de los no lógicos, de momento, parece que no se puede llevar a cabo esta tarea, y en la actualidad esa afirmación de reducir las matemáticas a la lógica es muy discutible.

Por otro lado, en la creación de nuevos conceptos que se dan y se han dado a lo largo de la historia, la imaginación y la intuición juegan un papel fundamental, entonces si todos los conceptos matemáticos se reducen a la lógica cómo es posible que sigan surgiendo nuevos conceptos.

2.1.2. La Escuela Intuicionista:

Es totalmente opuesta a la escuela logicista. Su fundador fue Brouwer.

Según el pensamiento intuicionista de la Matemática, cualquier intento de reducir la matemática a la lógica se basa en una equivocación. Para Brouwer, la matemática no es verdadera en cualquier mundo posible. Para esta escuela la Matemática es una actividad humana que se origina y tiene lugar en la propia mente, y por eso el tema principal que se trata en esta Escuela son las matemáticas que se desarrollan en la mente o en la intuición del matemático y son independientes de la experiencia del mismo.

Según ellos, la experiencia de entidades matemáticas sólo puede afirmarse cuando es posible llevar a cabo su construcción efectiva, no es independiente de la mente, sino que se construye en la mente del matemático.

Así por ejemplo, el intuicionismo rechaza que haya un problema de consistencia, pues la consistencia existe como consecuencia de un pensamiento correcto.

Podemos destacar como otros autores de esta escuela a Kronecker y Poincaré.

Otra oposición de la escuela intuicionista a la escuela logicista es por ejemplo la relación entre el lenguaje y las matemáticas. Aquí se toma que la matemática es independiente del lenguaje tal como lo entendemos.

También señalan que existen ciertos procedimientos lógicos que son intuitivamente aceptables, por eso analizaron cuáles son los principios lógicos aceptables para conseguir que la lógica usual se adapte a las intuiciones correctas.

Críticas:

Un problema con el que se encuentran los intuicionistas es que deben renunciar a algunas partes de las matemáticas que necesitan la utilización de los principios que ellos rechazan.

Otro problema es que los desarrollos que utilizan son extensos y complicados.

El intuicionismo no se preocupa por la aplicación de las matemáticas en la naturaleza, pues creen que las matemáticas son independientes de la percepción.

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 19 – JUNIO DE 2009

2.1.3. La Escuela Formalista:

Su principal representante es Hilbert. La escuela formalista considera que las entdades matemáticas son construcciones intelectuales.

Proponen la explicación de todas las ramas de la matemática mediante sistemas axiomáticos perfectamente formalizados y una vez hecho esto ya no aparecerán paradojas.

Para ellos la consistencia es una propiedad que debe tener todo sistema axiomático que este bien construido pues la no consistencia de un sistema da lugar a la aparición de paradojas matemáticas.

Según Hilbert tanto el logicismo como el intucionismo eran incapaces de probar la consistencia de la Matemática.

Hilbert asegura que la aproximación correcta a las matemáticas debe contener axiomas tanto de la lógica como de las matemáticas, conjuntamente. A partir de estos axiomas se deben hacer demostraciones objetivas.

Cada rama de las matemáticas debe tener su propio sistema de axiomas y sus propias leyes lógicas.

En su búsqueda de la verdad matemática que fuera aceptada por todos, Hilbert desarrolló una teoría llamada metamatemática. En ella propuso utilizar una lógica en la que estuvieran sólo los axiomas evidentes para todas las escuelas y se usaría un lenguaje intuitivo con algunos símbolos cuando fuera necesario.

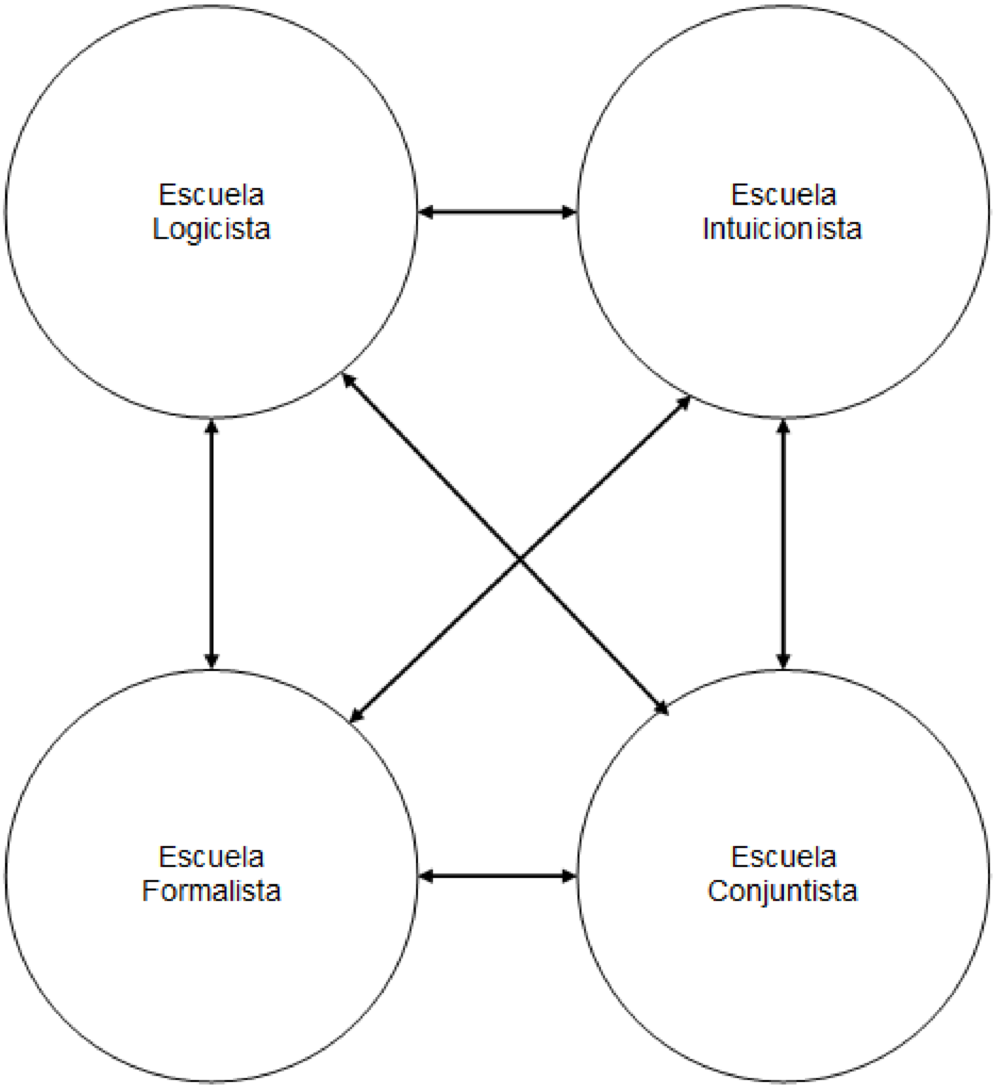
Críticas:

Se intentó demostrar la consistencia de la Aritmética y así luego poderla extender a otros sistemas axiomáticos, pero se descubrió que alcanzar la consistencia como Hilbert planteaba era irrealizable desde esta posición.

El principal objetivo de la teoría formalista era demostrar la verdad absoluta de la Matemática y parece imposible poder dar una demostración directa de la consistencia de la teoría que nos demuestre la veracidad absoluta.

Disponía de un método para probar la consistencia y este método había dado buenos resultados en sistemas simples, hecho que les hacía pensar que podría ser efectivo para probar la consistencia de todas las matemáticas.

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 19 – JUNIO DE 2009



2.1.4. La Escuela Conjuntista:

Tiene sus orígenes en Cantor y Dedekind.

La aparición de las paradojas hizo llevar a los matemáticos a la idea de que la causa estaba en una introducción informal de la teoría de conjuntos, por lo tanto, los conjuntistas pensaron que dando unos axiomas seleccionados se podrían eliminar las paradojas.

REVISTA DIGITAL INNOVACIÓN Y EXPERIENCIAS EDUCATIVAS

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 19 – JUNIO DE 2009

La axiomatización de la teoría de conjuntos fue realizada por Zermelo, aunque su sistema de axiomas fue posteriormente perfeccionado por Fraenkel.

A este sistema mejorado se le llama Zermelo-Fraenkel y todavía no ha producido paradojas pero no ha podido ser demostrada su consistencia.

Críticas:

Algunos matemáticos critican el sistema Zermelo-Fraenkel por no determinar los principios lógicos y que los axiomas habían sido elegidos de forma arbitraria para evitar las paradojas.

A pesar de las críticas, algunos matemáticos creen que el sistema Zermelo-Fraenkel es adecuado para construir todas las matemáticas.

3. LAS LIMITACIONES INTERNAS DE LOS SISTEMAS FORMALES:

A pesar de las diferencias entre las diferentes Escuelas, en las matemáticas a principios del siglo XX se iban resolviendo las paradojas que iban surgiendo en las diferentes Escuelas y cualquier matemático podía aceptar los principios de la Escuela que más le convenciese y posteriormente desarrollar sus investigaciones.

La parte fundamental es la noción de consistencia del sistema formal, es decir, que no nos llevará a una contradicción el sistema.

Supongamos que se ha construido un sistema formal cuyos teoremas matemáticos son verdaderos, entonces el sistema formal es consistente, esto es precisamente la condición de consistencia del sistema formal. Al revés, si se demuestra que un sistema formal es consistente, es condición suficiente para que los teoremas sean verdaderos.

Así pues, la demostración de consistencia del sistema formal es la clave del formalismo de las matemáticas y su limitación interna.

Aparte del problema de la consistencia de los sistemas formales, existe otro problema que es el de la amplitud. Un sistema se dice que es completo si tiene herramientas para establecer la veracidad o falsedad de cualquier enunciado.

Por supuesto, es deseable que cualquier sistema de axiomas sea completo, si no es completo hay enunciados que no se pueden probar ni refutar, a estos enunciados se les llaman indecibles, siendo una situación no deseable.

La Escuela logicista no trató el problema de la complitud, los intuicionistas pensaban que la mente humana era lo suficentemente poderosa como para poder diferenciar si un enunciado era falso o verdadero, los conjuntistas no estaban preocupados por la complitud pese a que si creían que sus sistemas eran completos, únicamente los formalistas estudiaron este tema ya que pensaban que todo problema matemático debía tener solución exacta.

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 19 – JUNIO DE 2009

Así pues, llegaron a demostrar que algunos sistemas triviales eran completos y consistentes, los formalistas estaban convencidos de que su matemática lograría probar la consistencia y la complitud de todas las matemáticas, pero Gödel publica lo que se llama teorema de incomplitud de Gödel donde se afirma que si una teoría formal lo suficientemente amplia es consistente entonces es incompleta.

4. BIBLIOGRAFÍA:

- Boyer, C. (2007). *Historia de la matemática*. Madrid: Alianza Editorial, S.A.
- Burton, D. (1991). *The history of mathematics*. Duduque: W. C. Brown Publishers.
- Rey Pastor, J. Babini, J. (1951). *Historia de la matemática*. Argentina: Espasa-Calpe S.A.

Autoría

- Nombre y Apellidos: Sergio Ballester Sampedro
- Centro, localidad, provincia: IES López Neyra, Córdoba, Córdoba
- E-mail: sballess@yahoo.es